# Оптимизационные задачи. Линейное программирование

Оптимизация заключается в том, чтобы *максимизировать* или *минимизировать* какую-то величину. Например, прибыль, доходы, эффективность работы обычно максимизируют. А расходы, убытки, степень риска стараются минимизировать.

Формулировка оптимизационной задачи (математическая модель):

1. Управляемые **переменные** модели X1, X2, X3,... (нужно найти).
2. **Целевая** **функция** (что нужно минимизировать или максимизировать)



1. **Ограничения** системы в виде равенств или неравенств (какие есть условия):







Если целевая функция и все ограничения записаны в линейном виде (т.е. в виде суммы и умножения на число), то это задача ***линейного программирования***.

**Целевая функция**:



или



**Ограничения**:



или



или

.

Условия неотрицательности переменных:

.

**Задача 1.**

Рассмотрим процесс производства соков из фруктового концентрата и воды. В зависимости от соотношения воды и концентрата, получается либо 100% сок, либо нектар.

Сок продается по 50 руб., а нектар за 35 руб. за литр.

Затраты сырья на производство одного литра сока или нектара приведены в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Нектар | Сок |
| Концентрат | 2 | 3 |
| Вода | 1 | 0,5 |

В запасе имеется 360 упак. концентрата и 300 л воды.

Требуется максимизировать доход от продаж.

Относительно спроса известно, что сока можно продать не более 100 литров, а нектара – на 50 литров больше, чем реально продано сока.

**Решение:**

**Задача 2.**

Канцелярская фирма «ЭЛКО» производит тетради и блокноты. Стоимость затрат труда, сырья на комплект продукции, а также отпускная цена продукции приведены в таблице

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Продукт | Тетради  | Блокноты |
| Отпускная цена | 100 | 90 |
| Стоимость затрат труда | 50 | 35 |
| Стоимость сырья | 30 | 40 |

На 1 декабря «ЭЛКО» располагает сырьем, которое позволяет изготовить 1000 комплектов тетрадей и 1000 комплектов блокнотов.

На эту же дату баланс компании выглядит следующим образом

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Элементы баланса | Наличные ресурсы (актив) | Обязательства (пассив) |
| Наличные деньги | 100 000 |  |
| Счета к оплате | 30 000 |  |
| Стоимость запасов | 70 000 |  |
| Банковский заем |  | 100 000 |

Текущее отношение наличных ресурсов (активов) к обязательствам (пассивам) составляет: 200 000/100 000 = 2.

«ЭЛКО» должна определить, сколько тетрадей и блокнотов следует производить в течение декабря. Потребность в продукции достаточно высока, чтобы быть уверенным в том, что все произведенное будет реализовано.

Все продажи осуществляются в кредит на два месяца и, следовательно, деньги за продукцию, произведенную в декабре, не будут получены до февраля следующего года. Ожидается, что в течение декабря «ЭЛКО» получит по счетам к оплате 20 000д.е. С другой стороны, у компании есть обязательства заплатить в данном месяце по займу 10 000д.е. и за месячную аренду помещения 10 000д.е. Известно, что 1 января «ЭЛКО» получит сырье стоимостью 20 000д.е. Оплату стоимости сырья необходимо осуществить к 1 февраля.

Служба менеджмента подсчитала, что для нормального функционирования фирмы размер наличности на 1 января должен составлять, по меньшей мере, 40 000д.е. Банк, обслуживающий компанию, выдвигает требование, чтобы текущее отношение активов к пассивам на начало января было не менее 2.

Что и сколько должна «ЭЛКО» произвести в декабре, чтобы максимизировать прибыль от продаж?

**Решение:**

**Задача 3.**

Для патрулирования небольшого города местному отделению полиции на каждые 4 часа времени, в зависимости от времени суток, требуется определенное количество работников

|  |  |
| --- | --- |
| Время | Необходимое количество патрульных |
| 00.00 − 04.00 | 8 |
| 04.00 − 08.00 | 7 |
| 08.00 − 12.00 | 4 |
| 12.00 − 16.00 | 5 |
| 16.00 − 20.00 | 6 |
| 20.00 − 24.00 | 6 |

Каждый полицейский работает по 8 часов.

Сформулируйте модель линейного программирования, которая может быть использована для минимизации числа полицейских, удовлетворяющих суточные требованиям по патрулированию города.

**Решение:**

**Задача 4.**

Фермерский кооператив владеет 230 га земли, на которых он производит три основные зерновые культуры: рожь, пшеницу и кукурузу. Продукция, производимая кооперативом, используется как для собственного потребления, так и для продажи. Кооператив организован таким образом, что потребности его членов в вышеуказанных продуктах должны быть удовлетворены в первую очередь, т.е. до того, как любой из них будет продан. Все излишки продукции продаются по рыночным ценам.

В таблице, приведенной ниже, для каждого продукта показана: урожайность с га, количество зерна, необходимого членам кооператива, и потребности рынка для различных каналов реализации.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Культура | Урожай­ность, ц/га | Отходы, % | Потребность кооператива, т | Каналы реализации |
| Название | Цена, руб./т | Объем, т |
| Рожь | 18,9 | 20% | 100 | Мельница | 4200 | 100 |
| Спиртозавод | 4500 | 80 |
| Элеватор | 3500 | 200 |
| Пшеница | 22,3 | 18% | 200 | Мельница | 7500 | 100 |
| Крупозавод | 5000 | 50 |
| Элеватор | 7200 | 200 |
| Кукуруза | 50,1 | 23% | 250 | Крупозавод | 4000 | 120 |
| Консервный завод | 4200 | 150 |

Определить количество земли, отводимое под каждую культуру, и каналы продаж для обеспечения максимального дохода кооператива.

**Решение:**

## Задание

Решить рассмотренные задачи средствами MS Excel.

## Дополнительная литература

1. Иванов С.Н. Математические методы исследования операций: Учебное пособие.

http://ef.donnu.edu.ua/emk/Data/IsslOper/Pdf/MMIO\_2.pdf

http://ef.donnu.edu.ua/emk/Data/IsslOper/Pdf/MMIO\_3.pdf

http://ef.donnu.edu.ua/emk/Data/IsslOper/Pdf/MMIO\_4.pdf

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2006.