# Математические методы сетевого моделирования

## Транспортные сети и потоки (продолжение)

**Максимальный поток**

Пример – город, находящийся на двух сторонах реки, в котором есть три моста. Насколько хорошей бы ни была транспортная сеть на каждой стороне реки, максимальный транспортный поток с одной стороны на другую ограничивается пропускной способностью мостов.

Мосты в являются *разрезом* данной сети, скорее всего, критическим. Хотя возможна ситуация, когда очень хороший мост выходит на узкую улицу. В этом случае *критический* разрез будет другим.

**Транспортная сеть** – ориентированный граф, в котором имеется единственный **источник** и единственный **сток**, а каждой дуге назначена **пропускная способность**.

**Источник** *S* – вершина, из которой дуги только исходят.

**Сток** *T* – вершина, в которую дуги только входят.

**Пропускная способность** *c*(*i*,*j*) – максимальный **поток** *f*(*i*,*j*) (вещества, транспорта, груза), который можно пустить по дуге (*i*,*j*).

3/3

2/2

0/2

3/8

2/9

Если реальный поток по дуге равен ее пропускной способности, то она называется **насыщенной**.

**Правило сохранения потока** – сумма потоков, входящих в вершину, равна сумме исходящих (кроме S и T):



Общий поток, выходящий из источника, равен потоку, входящему в сток:



**Общий поток сети F –** суммарный поток, который передается по сети от источника до стока.

**Разрез (**не обязательно критический**)** транспортной сети можно получить, если разбить все ее вершины на две группы: в одну должен входить источник, а в другую сток. Разрезом будут являться дуги, которые исходят из вершин первой группы, а входят в вершины второй.

Примеры разрезов:

Разрез можно понимать так: это такой набор дуг, в обход которого нельзя добраться от источника до стока.

**Критическим** будет разрез с минимальной суммарной пропускной способностью дуг. Критический разрез определяет общий **максимальный поток** по сети.

Существует много (более 20) методов нахождения максимального потока. Однако в любом случае задачу приходится решать итеративно, т.е. берется какой-то начальный поток и он постепенно увеличивается, пока не станет максимальным.

**Алгоритм Форда-Фалкерсона**:

1. Исходный поток – нулевой (0 по всем дугам).
2. Находим *увеличивающий путь* из источника в сток (лучше всего кратчайший). *Допустимые дуги*:
   1. направление дуги совпадает с направлением потока и поток по этой дуге меньше её пропускной способности;
   2. направление дуги противоположно направлению потока и поток по этой дуге больше нуля.
3. Пускаем через найденный путь максимально возможный поток:
   1. На найденном пути в остаточной сети ищем ребро с минимальной пропускной способностью cmin.
   2. Для каждого ребра на найденном пути с направлением увеличиваем поток на cmin, а в противоположном ему – уменьшаем на cmin.
   3. Модифицируем остаточную сеть. Для всех рёбер на найденном пути, а также для противоположных им рёбер, вычисляем новую пропускную способность. Если она стала ненулевой, добавляем ребро к остаточной сети, а если обнулилась, стираем его.
4. Если увеличивающих путей больше нет, задача решена. Иначе повторить с п.2.

После завершения работы алгоритма критический разрез можно найти по «недостроенному» увеличивающему пути: это будут насыщенные дуги, идущие из отмеченных вершин.

**Пример**. Найти максимальный поток и критический разрез. Как можно увеличить поток на 1?



Алгоритм поиска **кратчайшего увеличивающего пути**:

1. Отметить источник S (поставить в очередь).
2. Вычеркнуть первую вершину из очереди Vi и отметить новые вершины:
   * 1. в которые идут ненасыщенные дуги из Vi или
     2. из которых в Vi идут дуги с ненулевым потоком.
3. Повторить, пока не будет достигнут сток или пока не останется вершин, которые можно отметить.

**Пример**. Найти максимальный поток и критический разрез.

5

5

5

8

3

4

1

1

2

4

1

2

**Пример**. Сформировать транспортную сеть. Найти максимальный поток и критический разрез.

9

6

10

9

3

4

8

8

2