## Системы счисления. Двоичная арифметика

**Система счисления** **(СС)** определяет метод записи чисел в виде письменных знаков.

Виды СС:

– позиционные – значение цифры зависит от ее местоположения в записи числа;

– непозиционные

– смешанные

Почти все современные СС являются *позиционными*. Пример почти непозиционной СС – римская:

{I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, S = 100, D = 500, M = 1000}

X=10 вне зависимости от положения в числе. Но VI = 6, а IV = 4.

Полностью непозиционная СС – унарная.

**Основание** позиционной СС *q* – количество цифр в ней. Все цифры СС образуют **алфавит** A ={0, 1, 2,... q-1}.

Десятичная (dec): *q* = 10 A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Двоичная (bin): *q* = 2 A = {0, 1}

Шестнадцатеричная (hex): *q* = 16 A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Обозначения основания СС:

1510 = 11112 = F16

10d = 1010b = Ah

Число в позиционной системе счисления можно представить в виде суммы степеней q.

Разложение 10-чного числа по степеням:

437810 = 4∙103+3∙102+7∙101+8∙100

2,3510 = 2∙100+3∙10-1+5∙10-2

### Перевод чисел из одной СС в другую

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **DEC** | **BIN** | **HEX** | **DEC** | **BIN** | **HEX** | **DEC** | **BIN** | **HEX** | **DEC** | **BIN** | **HEX** |
| **0** | 0000 | 0 | **4** | 0100 | 4 | **8** | 1000 | 8 | **12** | 1100 | C |
| **1** | 0001 | 1 | **5** | 0101 | 5 | **9** | 1001 | 9 | **13** | 1101 | D |
| **2** | 0010 | 2 | **6** | 0110 | 6 | **10** | 1010 | A | **14** | 1110 | E |
| **3** | 0011 | 3 | **7** | 0111 | 7 | **11** | 1011 | B | **15** | 1111 | F |

**bin → hex и hex → bin**

Простая свертка: каждым 4 двоичным цифрам соответствует 1 16-ричная цифра (см. таблицу). Поэтому 16-ричная система часто используется как краткая запись двоичной.

11001011 10001001 00000101b = CB 89 05h

46B8h = 01000110 10111000b

**bin → dec и hex → dec**

Выполняется разложением на множители:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 100111012 | = |  | 1∙27+1∙24+1∙23+1∙22+1∙20=128+16+8+4+1  =15710 |
| 76543210 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 10,0112 | = |  | 1∙21+1∙2-2+1∙2-3=2+1/4+1/8=2,37510 |
| 10-123 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 17B16 | = |  | 1∙162+7∙161+11∙160=256+102+11=36910 |
| 210 |  |  |  |

Степени 2:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2^0= | 1 | 2^6= | 64 |
| 2^1= | 2 | 2^7= | 128 |
| 2^2= | 4 | 2^8= | 256 |
| 2^3= | 8 | 2^9= | 512 |
| 2^4= | 16 | 2^10= | 1024 |
| 2^5= | 32 |  |  |

215=1024∙32≈32000 (= 32 768)

232= (210)3∙22≈ 4∙10003=4∙млрд. (=4 294 967 296)

Мнемонические правила:

10 = 2

100 = 22=4

1000 = 23=8

10000 = 24=16

100 00000000 =210=1024

11 = 22-1=3

111 = 23-1=7

1111 = 24-1=15

11111111 = 28-1=255

Если в двоичном числе много единиц, то проще вычитать степени, а не складывать:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 11110112 | = |  | (27-1)–22=127-4=12310 | =26+25+24+23+21+20 |
| 6543210 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1011111012 | = |  | (29-1)–27–21=512-1-128-2=38110 |
| 876543210 |  |  |  |

**dec → bin**

Можно использовать обратное разложение по степеням и мнемонические правила. Удобно для чисел, близких к степеням 2.

12710=27-1=11111112

3510=25+2+1=100112

51010=(29-1)-1=1 111111102

Основной способ – **метод деления углом** (для целых чисел):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 43 | 2 |  |  |  |  |  |
| 42 | 21 | 2 |  |  |  |  |
| 1 | 20 | 10 | 2 |  |  |  |
|  | 1 | 10 | 5 | 2 |  |  |
|  |  | 0 | 4 | 2 | 2 |  |
|  |  |  | 1 | 2 | 1 | 2 |
|  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  | 1 |  |

43d = 101011b

Выполнять деление с остатком до тех пор, пока в результате не получится 0. В ответ записываем полученные остатки в обратном порядке.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 27 | 2 |  |  |  |  |
| 1 | 13 | 2 |  |  |  |
|  | 1 | 6 |  |  |  |
|  |  | 0 | 3 |  |  |
|  |  |  | 1 | 1 |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

27d = 11011b

Для десятичных дробей – **метод умножения на 2**:

|  |
| --- |
| 0,25 |
| x2 |
| **0** ,5 |
| x2 |
| **1** ,0 |

0,25d = 0,01b

Выполнять умножение дробной части на 2, пока не получится 0 или не будет достигнута требуемая точность. В ответ записываем целые части результатов умножения.

|  |
| --- |
| 0,703125 |
| x2 |
| **1** ,40625 |
| x2 |
| **0** ,8125 |
| x2 |
| **1** ,625 |
| x2 |
| **1** ,25 |
| x2 |
| **0** ,5 |
| x2 |
| **1** ,0 |

0,703125d = 0,101101b

|  |
| --- |
| 0,333 |
| x2 |
| **0** ,666 |
| x2 |
| **1** ,332 |
| x2 |
| **0** ,664 |
| x2 |
| **1** ,328 |
| x2 |
| **0** ,656 |
| … |

0,333d = 0,01010…b

Для **смешанных** чисел целая и дробная части переводятся отдельно:

53,12d

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 53 | 2 |  |  |  |  |
| 1 | 26 | 2 |  |  |  |
|  | 0 | 13 | 2 |  |  |
|  |  | 1 | 6 | 2 |  |
|  |  |  | 0 | 3 | 2 |
|  |  |  |  | 1 | 1 |

53d = 110101b

|  |
| --- |
| 0,12 |
| x2 |
| **0** ,24 |
| x2 |
| **0** ,48 |
| x2 |
| **0** ,96 |
| x2 |
| **1** ,92 |
| x2 |
| **1** ,84 |
| … |

0,12d = 0,00011…b

53,12d = 110101,00011…b

### Двоичная арифметика

Сложение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **+** | **0** | **1** |
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 10 |

|  |  |
| --- | --- |
| + | 100100 |
| 1010 |
|  | 101110 |

|  |  |
| --- | --- |
| + | 100101 |
| 11100 |
|  | 1000001 |

|  |  |
| --- | --- |
| + | 11111 |
| 111 |
|  | 100110 |

Вычитание

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **–** | **0** | **1** |
| **0** | 0 | -1 |
| **1** | 1 | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
| – | 11111 |
| 111 |
|  | 11000 |

|  |  |
| --- | --- |
| – | 1000 |
| 1 |
|  | 111 |

|  |  |
| --- | --- |
| – | 1000 |
| 11 |
|  | 0101 |

|  |  |
| --- | --- |
| – | 10001 |
| 100 |
|  | 1101 |

|  |  |
| --- | --- |
| – | 110011 |
| 111 |
|  | 101100 |

Умножение

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*** | **0** | **1** |
| **0** | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| \* | 101101 |
| 101 |
| + | 101101 |
| 101101 |
|  | 11100001 |

|  |  |
| --- | --- |
| \* | 1011 |
| 11 |
| + | 1011 |
| 1011 |
|  | 100001 |

Умножение на круглое число – просто дописываем нужное кол-во нулей в конце:

10111b \* 10b = 101110b

10111b \* 100b = 1011100b