# Математические методы сетевого моделирования

## Сетевое планирование и управление (СПУ)

СПУ является составной частью **управления проектами** и входит в большое число программных продуктов.

**Program (Project) Evaluation and Review Technique** (сокращенно **PERT**) – методика оценки и анализа программ (проектов).

**Проект** – это работы, планы, мероприятия и другие задачи, направленные на создание уникального продукта (устройства, работы, услуги).

Примеры:

1. Строительство жилого дома.
2. Ремонт теплотрассы.
3. Прокладка автомобильной дороги.
4. Разработка сайта компании.
5. Шитье платья.
6. Составление годового отчета для инвесторов.

Проект обладает рядом свойственных ему характеристик, определив которые, можно точно сказать, относится ли анализируемый вид деятельности к проектам.

1. Проект имеет четкие временны́е рамки.
2. Проект должен порождать уникальные продукты, иначе это серийное производство.
3. Проект развивается во времени, проходя через определенные этапы или шаги.
4. Проект как и любое производство:

* выполняется людьми;
* ограничен доступностью ресурсов;
* планируется, исполняется и управляется.

**Управление проектами** – область деятельности, в ходе которой определяются и достигаются четкие цели проекта при балансировании между объемом работ, ресурсами (такими как деньги, труд, материалы, энергия, пространство и др.), временем, качеством и рисками.

**СПУ** состоит из трех основных этапов.

1. Структурное планирование.

2. Календарное планирование.

3. Оперативное управление.

**Структурное планирование** начинается с разбиения проекта на четко определенные *работы (операции)*, для которых определяется *продолжительность*. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

**Календарное планирование** предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе **оперативного управления** используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

### Структурное планирование

#### События и работы

Основные понятия: *событие* и *работа*.

**Работа** – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата и требующий затрат ресурсов и времени.

Классификация работ:

По *физической природе*:

действие: заливка фундамента бетоном, составление заявки на материалы, изучение конъюнктуры рынка;

процесс: застывание бетона, выдерживание вина, травление плат;

ожидание: ожидание поставки комплектующих, прослеживание детали в очереди к станку.

По *количеству затрачиваемого времени*:

**действительная,** т.е. требующей затрат времени;

**фиктивная**, не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам, сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

**Событие** – момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие.

Событие представляет собой результат проведенных работ и не имеет протяженности во времени. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д.

Предварительно работы обычно записывают в виде таблицы.

Столбцы:

Обязательно:

* Наименование работы;
* Продолжительность работы (в ч, дн., мес., для всех одинаково);

Необязательно:

* Предшествующие работы (можно сразу показать на графике);
* Ресурсы (сырье, материалы, оборудование и др.);
* Исполнитель;
* Стоимость.

Дополнением к продолжительности работ может служить **объем** – км проложенных путей, количество возведенных этажей, построенных м2, разработанных страниц сайта, подготовленных страниц документации и т.д.

Пример

Приготовление борща

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№* | *Работа* | *Длительность, минут* | *Ресурсы* |
|  | Подготовка продуктов |  |  |
|  | Мытье | 5 |  |
|  | Чистка овощей | 10 |  |
|  | Разделка мяса | 10 |  |
|  | Нарезка овощей | 10 |  |
|  | Приготовление бульона |  |  |
|  | Кипячение воды с мясом | 15 |  |
|  | Снятие пенки | 5 |  |
|  | Варка мяса | 60 |  |
|  | Приготовление поджарки |  |  |
|  | Разогревание сковороды | 5 |  |
|  | Поджаривание овощей | 10 |  |
|  | Варка овощей |  |  |
|  | Варка сырых овощей | 20 |  |
|  | Добавление поджарки | 0,5 |  |
|  | Добавление специй |  |  |
|  | Добавление соли | 0,5 |  |
|  | Добавление остальных специй | 0,5 |  |

#### Сетевой график

Весь проект изображается в виде **сетевого графика**.

**Работы** изображаются в виде **дуг**: действительные сплошной линией, фиктивные пунктирной. Сверху в скобках указывается продолжительность работы *t*(*i*; *i*).

(*t*)

*i*

*j*

**События** изображаются в виде **вершин:** кружок, разделенный на 4 части, в каждой будет свое число.

*i*

*t*р

*t*п

*R*

*i*

*t*р

*t*п

*R*

Таким образом, начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются **начальным** и **конечным** событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы (*i*, *j*), состоящий из номеров начального (*i*-го) и конечного (*j*-го) событий, например (2, 4); 3-8; 9, 10.

На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий изображаются с помощью сетевого графика, где работы изображаются стрелками, которые соединяют вершины, изображающие события. Работы, выходящие из некоторого события, не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют **исходным***.* Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим.**

При изображении сетевого графика необходимо следовать следующим правилам:

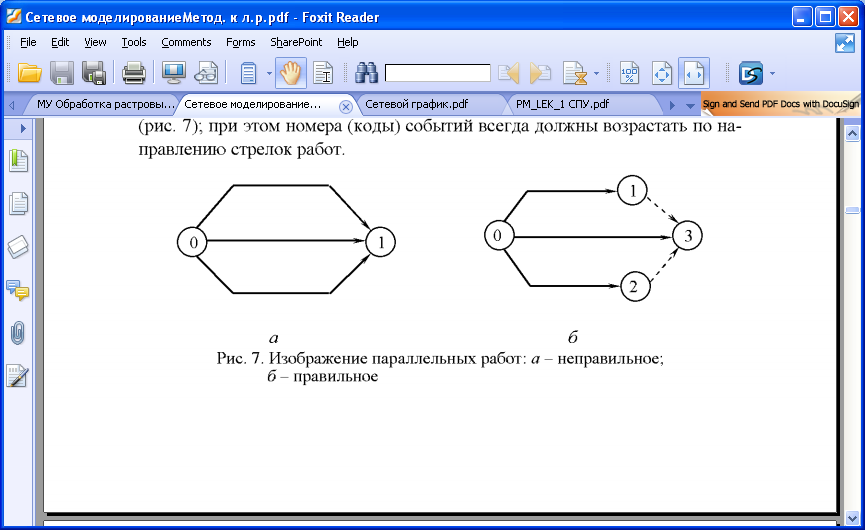
1. График рисуется слева направо.
2. Длина дуги на рисунке не зависит от времени выполнения работы и она не обязательно должна представлять прямолинейный отрезок.
3. Следует избегать пересечения дуг.
4. Не должно быть висячих событий («хвостов»), кроме исходного.

«хвост»

1. Не должно быть тупиковых событий, кроме завершающего.

«тупик»

1. Не должно быть параллельных работ между одними и теми же событиями, для избежания такой ситуации используют фиктивные работы.



1. Если одна работа должна начаться после того, как другая будет частично завершена, то последнюю следует разбить на части. Каждая часть рассматривается как самостоятельная работа.
2. Не должно быть циклов, иначе проект никогда не будет доведен до конца.

Пример

**Строительство гостиничного комплекса**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Наименование работы | Продолжи­тельность, дн. | Предшест­вующие работы |
| 1. Подготовка строительной площадки | 5 |  |
| 1. Подведение коммуникаций | 20 | 1. |
| 1. Строительство гостиницы | ~~100~~ | ~~1.~~ |
| * 1. Строительство фундамента | 25 | 1. |
| * 1. Возведение стен и перекрытий | 60 | 3.1 |
| * 1. Возведение крыши | 5 | 3.2, 2 |
| * 1. Отделочно-монтажные работы | 10 | 3.3 |
| 1. Строительство парковки | 5 | 2, 3.2 |
| 1. Благоустройство территории | 5 | 2, 3.3, 4 |
| 1. Набор персонала | 30 |  |



Необходимо правильно пронумеровать события: событие с меньшим номером всегда происходит раньше события с бо́льшим номером.

Для этого используют следующий алгоритм нумерации вершин:

1. Исходному событию присваивается №1 (пишется в левом верхнем углу кружочка).
2. Находятся события, все дуги в которые ведут из пронумерованных вершин. Этим событиям присваиваются следующие по порядку номера (обычно сверху-вниз по графику).
3. П.2 повторяется, пока не будет пронумеровано завершающее событие. Оно должно получить наибольший номер, иначе в нумерации или в самом графике есть ошибка.

Пример. Строительство гостиницы (продолжение)



### Календарное планирование

Для составления календарного плана анализируется сетевой график.

Сначала определяются *ранние* и *поздние* сроки наступления событий (верхний и нижний левый сектор).

**Ранние сроки событий** – время от начала проекта, раньше которого они не могут наступить.

* 1. Исходному событию присваивается ранний срок 0.
  2. Следующим событиям ранние сроки назначаются по порядку нумерации, как наибольшее время, которое пройдет до их наступления.



Ранний срок конечного события равен минимальному времени выполнения всего проекта.

**Поздние сроки событий** – время, позже которого они не могут наступить, не задерживая проект.

* 1. Конечному событию присваивается поздний срок, равный раннему .
  2. Предыдущим событиям ранние сроки назначаются в обратном порядке нумерации:



**Резерв** – насколько можно задержать наступление события, не задерживая проект в целом. Разность между поздним и ранним сроком, записывается в нижнем правом секторе.



Пример. Строительство гостиницы (продолжение)

(5)

(25)

(60)

(20)

(5)

(5)

(30)

(5)

(10)

**1**

0

0

*0*

**2**

5

5

*0*

**3**

30

30

*0*

**4**

90

90

*0*

**5**

95

95

*0*

**6**

95

100

*5*

**7**

105

105

*0*

tр (2) = tр (1) + t (1; 2) = 0 + 5 = 5

tр (4) = max {5 + 20; 30 + 60} = max {25; 90} = 90

tп (5) = min {105 – 10; 100 – 0} = min {95; 100} = 95

Сроки выполнения событий соответствуют **срокам выполнения работ**:

* Ранний срок начала работы 
* Ранний срок окончания работы 
* Поздний срок начала работы 
* Поздний срок окончания работы 
* Полный резерв 
* Свободный резерв 

Их расчет удобно записать в виде таблицы.

Пример. Строительство гостиницы (продолжение)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа |  |  |  |  |  |  |  |
| 1. (1; 2) | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| 2. (2; 4) | 20 | 5 | 25 | 70 | 90 | 65 | 65 |
| 3.1 (2; 3) | 25 | 5 | 30 | 5 | 30 | 0 | 0 |
| 3.2 (3; 4) | 60 | 30 | 90 | 30 | 90 | 0 | 0 |
| 3.3 (4; 5) | 5 | 90 | 95 | 90 | 95 | 0 | 0 |
| 3.4 (5; 7) | 10 | 95 | 105 | 95 | 105 | 0 | 0 |
| 4. (4; 6) | 5 | 90 | 95 | 95 | 100 | 5 | 0 |
| 5. (6; 7) | 5 | 95 | 100 | 100 | 105 | 5 | 5 |
| 6. (1; 7) | 30 | 0 | 30 | 75 | 105 | 75 | 75 |

**Полный путь** – путь от исходного до конечного события.

**Критический путь** – полный путь наибольшей продолжительности. Работы на критическом пути имеют нулевой полный резерв и называются **критическими**.

**Подкритический** путь – следующий после критического по продолжительности полный путь.

(5)

(25)

(60)

(20)

(5)

(5)

(30)

(5)

(10)

**1**

0

0

*0*

**2**

5

5

*0*

**3**

30

30

*0*

**4**

90

90

*0*

**5**

95

95

*0*

**6**

95

100

*5*

**7**

105

105

*0*

Продолжительность критического пути равна раннему и позднему сроку конечного события.

Работы на критическом пути нельзя задерживать, иначе это задержит весь проект. Зато, если приложить усилия и сократить срок выполнения этих работ, то и выполнение всего проекта можно ускорить.

Т.е. сокращение срока выполнения проекта должно происходить за счет сокращения сроков выполнения критических работ.

Однако сокращать сроки нельзя до бесконечности. В определенный момент критический путь перестанет быть самым длинным. Тогда его место займет подкритический путь.

### Диаграмма Ганта (календарный график)

Показывает распределение работ во времени.

На графике по горизонтальной оси откладывается время, а по вертикальной – номера работ.

Каждая работа показывается горизонтальной линией от раннего срока начала до раннего срока завершения работы. Длина линии равна длительности работы. Поздний срок завершения работы обычно отмечается маркером (точкой, крестиком, вертикальной чертой). Иногда стрелками показывают связи работ между собой (какая работа должна идти после какой, у них совпадают номера начального и конечного событий, либо они связаны через фиктивные работы).

5

0

25

30

90

105

1. (1;2)

2. (2;4)

3.1. (2;3)

3.2. (3;4)

3.3. (4;5)

95

3.4. (5;7)

4. (4;6)

5. (6;7)

100

6. (1;7)

t

Диаграмму Ганта можно построить в Excel (<http://office.microsoft.com/ru-ru/excel-help/HA010238253.aspx>).

Вариант с осью времени вверху:

### Диаграмма загрузки

Показывает, сколько рабочих нужно одновременно задействовать для выполнения работ. Строится на основе диаграммы Ганта.

Например, с 0 по 5 день одновременно выполняется 2 работы: 1 и 6. Значит, нужно 2 бригады рабочих.

С 5 по 25 день - 3 бригады для работ 2, 3.1 и 6.

И т.д.

Диаграмму загрузки удобно строить прямо под диаграммой Ганта, с такой же горизонтальной осью.

5

0

25

30

90

105

1. (1;2)

2. (2;4)

3.1. (2;3)

3.2. (3;4)

3.3. (4;5)

95

3.4. (5;7)

4. (4;6)

5. (6;7)

100

6. (1;7)

t

t

5

0

25

30

90

105

95

100

1

2

3

4

Т.е. всего для выполнения проекта потребуется 3 бригады (максимум с 5 по 25 день).

Мы можем оптимизировать проект, сократив число бригад до 2, если сместим выполнение работы 2 (2; 5) на 30-й день.

5

0

25

30

90

105

1. (1;2)

2. (2;4)

3.1. (2;3)

3.2. (3;4)

3.3. (4;5)

95

3.4. (5;7)

4. (4;6)

5. (6;7)

100

6. (1;7)

t

t

5

0

25

30

90

105

95

100

1

2

3

4

**Строительство гостиничного комплекса**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Наименование работы | Продолжи­тельность, дн. | Предшест­вующие работы |
| 1. Подготовка строительной площадки | 5 |  |
| 1. Подведение коммуникаций | 20 | 1. |
| 1. Строительство гостиницы | 100 | 1. |
| * 1. Строительство фундамента | 25 | 1. |
| * 1. Возведение стен и перекрытий | 60 | 3.1 |
| * 1. Возведение крыши | 5 | 3.2, 2 |
| * 1. Отделочно-монтажные работы | 10 | 3.3 |
| 1. Строительство парковки | 5 | 2, 3.2 |
| 1. Благоустройство территории | 5 | 2, 3.3, 4 |
| 1. Набор персонала | 30 |  |

(5)

(25)

(60)

1.

2.

(20)

3.1

(5)

3.2

3.3

(5)

4.

3.4

6.

(30)

5.

(5)

(10)

(5)

(25)

(60)

(20)

(5)

(5)

(30)

(5)

(10)

**1**

0

0

*0*

**2**

5

5

*0*

**3**

30

30

*0*

**4**

90

90

*0*

**5**

95

95

*0*

**6**

95

100

*5*

**7**

105

105

*0*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № работы | | t | tрн | tро | tпн | tпо | Rп | Rс |
|  | **(1; 2)** | **5** | **0** | **5** | **0** | **5** | **0** | **0** |
|  | (2; 4) | 20 | 5 | 25 | 70 | 90 | 65 | 65 |
|  |  | 100 |  |  |  |  |  |  |
|  | **(2; 3)** | **25** | **5** | **30** | **5** | **30** | **0** | **0** |
|  | **(3; 4)** | **60** | **30** | **90** | **30** | **90** | **0** | **0** |
|  | **(4; 5)** | **5** | **90** | **95** | **90** | **95** | **0** | **0** |
|  | **(5; 7)** | **10** | **95** | **105** | **95** | **105** | **0** | **0** |
|  | (4; 6) | 5 | 90 | 95 | 95 | 100 | 5 | 0 |
|  | (6; 7) | 5 | 95 | 100 | 100 | 105 | 5 | 5 |
|  | (1; 7) | 30 | 0 | 30 | 75 | 105 | 75 | 75 |

**Разработка web-сайта**

|  |  |
| --- | --- |
| Наименование работы | Продолжи­тельность, дн. |
| 1. Анализ существующих сайтов аналогичной тематики | 3 |
| 1. Разработка структуры сайта | 1 |
| 1. Разработка вариантов дизайна сайта   3.1 Разработка общего дизайна  3.2 Разработка детального дизайна | 5  3  2 |
| 1. Утверждение структуры и дизайна сайта | 1 |
| 1. Подготовка контента | 7 |
| 1. Наполнение сайта контентом | 4 |
| 1. Утверждение окончательного варианта сайта | 1 |
| 1. Размещение сайта в сети Интернет | 1 |
| 1. Тестирование работы сайта   9.1 Текущее тестирование  9.2 Итоговое тестирование | 0,5 |
| 1. Регистрация сайта в поисковых системах и рубрикаторах | 0,5 |
| 1. Сдача проекта заказчику | 1 |

(3)

(1)

(3)

(2)

(1)

(7)

(4)

(1)

(1)

(0,5)

(0,5)

(1)

1.

2.

3.1

3.2

5.

4.

6.

7.

9.1

8.

9.2

10.

11.

(3)

(1)

(3)

(2)

(1)

(7)

(4)

(1)

(1)

(0,5)

(0,5)

(1)

**Олимпийский объект (бобслейная трасса)**

|  |
| --- |
| Наименование работы |
| 1. Подготовительные работы |
| * 1. Расчистка территории от леса |
| * 1. Пересадка Краснокнижных растений |
| * 1. Удаление плодородного слоя грунта |
| * 1. Селепропуск вдоль СБТ |
| * 1. Демонтаж водопровода к Тирольскому домику |
| * 1. Демонтаж водопровода к ГУП Гостиничный комплекс |
| * 1. Демонтаж водопровода от родника ГУП КОСП НИИП Россельхозакадемии |
| * 1. -1.13Вынос электросетей ... |
| 1. Подпорные стены |
| 1. Земляные работы |
| 1. Строительство основных зданий |
| 1. Строительство опор для трассы |
| 1. Устройство U-образной балки (желоба для трассы) |
| 1. Устройство трубопровода для хладагена |
| 1. Строительство трассы |
| 1. Технологическое оборудование |
| 1. Системы автоматизации |
| 1. Электроснабжение |
| 1. Дороги и площадки |

**Задание 4.**

Исходные данные по проекту включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ.

|  |  |
| --- | --- |
| Название работы | Продолжительность работы |
| A | 10 |
| B | 8 |
| C | 4 |
| D | 12 |
| E | 7 |
| F | 11 |
| G | 5 |
| H | 8 |
| I | 3 |
| J | 9 |
| K | 10 |

1. Работы *С*, *I*, *G* являются исходными работами проекта, которые могут выполняться одновременно.
2. Работы *Е* и *А* следуют за работой *С*.
3. Работа *Н* следует за работой *I*.
4. Работы *D* и *J* следуют за работой *G*.
5. Работа *В* следует за работой *Е*.
6. Работа *К* следует за работами *А* и *D*, но не может начаться прежде, чем не завершится работа *Н*.
7. Работа *F* следует за работой *J*.

Задание:

1. Нарисовать сетевой график проекта, пронумеровать события.
2. Показать на графике ранние и поздние сроки и резервы событий.
3. Показать на графике критический путь.
4. Рассчитать ранние и поздние сроки начала и окончания, полные и свободные резервы работ (в виде таблицы).



**1**

0

0

0

**3**

3

9

6

**2**

4

7

3

**4**

5

5

0

**5**

11

19

8

**6**

17

17

0

**7**

14

16

2

**8**

27

27

0

(4)

(10)

(5)

(7)

(8)

(3)

(8)

(9)

(12)

(10)

(11)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа |  |  |  |  |  |  |  |
| A (2:6) | 10 | 4 | 14 | 7 | 17 | 3 | 3 |
| B (5;8) | 8 | 11 | 19 | 19 | 27 | 8 | 8 |
| C (1;2) | 4 | 0 | 4 | 3 | 7 | 3 | 0 |
| D (4;6) | 12 | 5 | 17 | 5 | 17 | 0 | 0 |
| E (2;5) | 7 | 4 | 11 | 12 | 19 | 8 | 0 |
| F (7;8) | 11 | 14 | 25 | 16 | 27 | 2 | 2 |
| G (1;4) | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| H (3;6) | 8 | 4 | 12 | 9 | 17 | 5 | 6 |
| I (1;3) | 3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 6 | 0 |
| J (4;7) | 9 | 5 | 14 | 7 | 16 | 2 | 0 |
| K (6;8) | 10 | 17 | 27 | 17 | 27 | 0 | 0 |